4. Énoncés des exercices

Exercice 3.1 Écrire les nombres complexes donnés sous la forme $a+ib$
$-i-(2i+1)(-2-i)$
$-(-2+5i)(-i-1)$

Exercice 3.2 Déterminer le conjugué des nombres complexes donnés :
$\frac{1+i}{1-i}$
$\frac{1-i}{1+i}$
$(5+2i)^3$
$\left(\frac{i}{i+1}\right)^5$

Exercice 3.3 Calculer le module de chacun des nombres complexes ci-dessous :

1. $(4+3i)(5-i)$
2. $(2-3i)^5$
3. $\frac{5}{(6-i)^2}$
4. $\frac{x+iy}{x-iy}$, avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$
5. $\frac{3-7i}{(1-i)^4}$
6. $\frac{1}{4+5i}+\frac{1}{6+7i}$

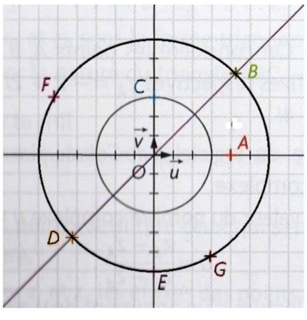
Exercice 3.4 Donner la forme trigonométrique $\cos\theta + i\sin\theta$, puis la forme exponentielle $e^{i\theta}$ des complexes suivants :

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
2. $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. -1
6. i
7. $-i$

Exercice 3.5 On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Calculer ω^5, et prouver que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$
   (indication : Mq $(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)=1-\omega^5$)
2. On pose $u=\omega+\omega^4$, et $v=\omega^2+\omega^3$.
   (a) Calculer $u+v$ et uv.
   (b) On admet que dans une équation du second degré dont le coefficient dominant est 1, donc du type $x^2-sx+p=0$, le coefficient p est le produit des racines et le coefficient s leur somme. De quelle équation de ce type les nombres u et v sont-ils solution ?
   (c) Résoudre cette équation, et en déduire que $u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $v=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
3. Démontrer que $u=\omega+\overline{\omega}$
4. Déduire de ce qui précède la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$

Exercice 3.6 Dans le repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, déterminer par lecture graphique le module et un argument des affixes des points A, B, C, D, et E.



Exercice 3.7 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -5i$
2. $z_2 = -3$
3. $z_3 = (\sqrt{3} + 1)$
4. $z_4 = -i(2 + \sqrt{2})$

Exercice 3.8 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (-1 + i)(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3$
2. $z_2 = -2i(1 + \sqrt{3}.i)^6$
3. $z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{-1-i}\right)^2$

≪ **Point méthode :** ≫ Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle.

- Plan A : On arrive à factoriser sous la forme $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec ρ positif, et $\cos\theta$ et $\sin\theta$ les cosinus et sinus d'un même angle "connu".
- Plan B (comme "bourrin") : On calcule $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
  On divise tout par ρ, pour le factoriser : $z = a + ib = \rho\left(\frac{a}{\rho} + i\frac{b}{\rho}\right)$
  $\frac{a}{\rho}$ est le cosinus de l'angle θ cherché, on en déduit θ (éventuellement à l'aide de $\cos^{-1}$; on vérifie que $\frac{b}{\rho}$ est bien le sinus de θ (sinon, prendre l'angle opposé).

Exercice 3.9 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants (attention aux pièges !) :

1. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
2. $z_2 = -3\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
3. $z_3 = 4\left(\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 3.10 On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Mettre sous forme exponentielle :
$\overline{j}$; j^2 ; $j + j^2$; $1 + j$; $j - j^2$; $1 - j$

Exercice 3.11 En utilisant la notation exponentielle, déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$
2. $\frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$
3. $\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice 3.12 Écrire sous forme exponentielle les nombres : $a = -2 + 2i$ et $b = -3 - i\sqrt{3}$.
En déduire la forme exponentielle du nombre ab.

Exercice 3.13 On considère les points A, B et C du plan ayant pour affixes respectives : $z_A = -1$, $z_B = 2 + i$, et $z_C = 1 - i$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?
Indication : L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A$.
Deux vecteurs d'affixes respectives z et z' sont orthogonaux ssi $\frac{z}{z'} = \pm\rho i$.
En effet, dans ce cas, $z = z' \times \rho e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$, donc $arg(z) = arg(z') \pm \frac{\pi}{2}$.
Montrer qu'ici $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux, et que ABC est rectangle isocèle en C.

Exercice 3.14 A, B et C sont trois points du plan complexe d'affixes respectives $-1 + \sqrt{3}i$, 2, et $-1 - i\sqrt{3}$.

1. Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sous forme algébrique ($a + ib$).
2. Montrer que ABC est équilatéral (ce sera le cas si les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même module...).

Exercice 3.15 Soit M un point d'affixe z, déterminer et représenter graphiquement :

1. l'ensemble E_1 des points M tels que $|z| = 4$
2. l'ensemble E_2 des points M tels que $|\overline{z}| = 2$
3. l'ensemble E_3 des points M tels que $|z - 1| = 3$
4. l'ensemble E_4 des points M tels que $|z - 4i| = 4$

Exercice 3.16 Pour tout complexe non nul z, on donne $z' = z\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Sachant que $z = e^{i\theta}$, donner le module et un argument de z'.

Problème de Bac

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
   Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.